УДК 514.12:512.64

Р. А. МАРЧУК
Хмельницький національний університет

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЛІНІЙНИХ НЕОДНОРІДНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТРЕТЬОГО ПОРЯДКУ АНАЛІТИЧНО ЧИСЛОВИМ МЕТОДОМ

Розроблено методику розв'язування лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь третього порядку зі змінними коефіцієнтами аналітично числовим методом. При цьому на функції, що фігурують у диференціальному рівнянні, не накладається жодних обмежень і вони можуть бути задані будь-яким способом.

There has been developed a way of solving analytically by a numerical method the linear heterogeneous differential equations of the third order with variable coefficients. At that onto functions which appear in the differential equation, there are no limitations imposed and they may be set in any way.

Ключові слова: диференціальне рівняння, чисельний метод розв'язування.

Дослідження багатьох фізичних, технічних, хімічних, радіотехнічних та ін. процесів зводиться до розв'язування лінійних диференціальних рівнянь. Аналітичні методи розв'язування розроблені для рівнянь з постійними коефіцієнтами та для деяких рівнянь, коефіцієнтами у яких фігурують поліноми. Методику розв'язування лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь другого порядку аналітично числовим методом викладено у роботі [1].

Постановка завдання. Знайти частковий розв'язок диференціального рівняння

$$\frac{d^3y}{dt^3}+g(t)\frac{d^2y}{dt^2}+\varphi(t)\frac{dy}{dt}+\psi(t)=f(t) \tag{1}$$

за таких початкових умов:

$$y(t_0)=y_0;\quad y'(t_0)=y_0';\quad y''(t_0)=y_0''. \tag{2}$$

Тут $g(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $f(t)$ – задані будь-яким способом функції на інтервалі $[t_0,t_n]$, на якому необхідно знайти розв'язок.

Розв'язання. Інтервал $[t_0,t_n]$ точками

$$t_k=t_0+k\cdot h \tag{3}$$

поділимо на n однакових дрібних інтервалів шириною

$$h=\frac{t_n-t_0}{n}. \tag{4}$$

Довжина h інтервалу є настільки малою, що функції $g(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ на кожному з цих інтервалів можна замінити постійними величинами, що дорівнюють їх значенням у центрі інтервалу, а функцію $f(t)$ – вважати лінійною. З таких допущень на кожному інтервалі слід розв'язувати диференціальне рівняння

$$\frac{d^3y}{dt^3}+a_k\frac{d^2y}{dt^2}+b_k\frac{dy}{dt}+m_ky=c_kt+d_k, \tag{5}$$

у якому

$$\begin{gathered}a_k=g(t_k-0,5h);\ b_k=\varphi(t_k-0,5h);\ m_k=\psi(t_k-0,5h);\\ c_k=\frac{f(t_k)-f(t_{k-1})}{h};\ d_k=\left(1+\frac{t_{k-1}}{h}\right)f(t_{k-1})-\frac{t_{k-1}}{h}f(t_k).\end{gathered} \tag{6}$$

Таким чином, задача зводиться до розв'язування на кожному інтервалі лінійного диференціального рівняння з постійними коефіцієнтами і правою частиною у вигляді полінома першого порядку. Початкові умови для кожного з таких рівнянь записуємо із розв'язку аналогічного рівняння на попередньому інтервалі у крайній правій точці. Почавши розв'язування рівняння (5) з першого інтервалу $[t_0,t_1]$ за початкових умов (2) одержимо розв'язок $y(t)$ та похідні $y'(t)$, $y''(t)$ на цьому інтервалі. Обчисливши $y(t)$, $y'(t)$ та $y''(t)$, при $t = t_1$ матимемо початкові значення для диференціального рівняння типу (5) на інтервалі $[t_1, t_2]$. Знайшовши його розв'язок на другому інтервалі, обчислимо значення $y(t_2)$ та $y'(t_2)$, які будуть служити початковими умовами для диференціального рівняння виду (5) на наступному інтервалі. Переходячи послідовно від інтервалу до інтервалу, одержимо розв'язок диференціального рівняння (1) за початкових умов (2) на всьому інтервалі $[t_0, t_n]$.

Відомо [2], що загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння (5) можна записати як суму загального розв'язку відповідного йому однорідного диференціального рівняння та деякого часткового розв'язку неоднорідного рівняння.

Характеристичне рівняння для диференціального рівняння (5) має вигляд:

$$r^3 + a_k r^2 + b_k r + m_k = 0. \tag{7}$$

Далі індекси при буквах a, b, m, c, d не будуть писатись.

Корені рівняння (7) при $Q > 0$ мають вигляд:

$$r_1 = -\frac{a}{3} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{Q}} + \sqrt{-\frac{q}{2} - \sqrt{Q}};$$

$$r_{2,3} = -\frac{a}{3} + B - A \pm \sqrt[3]{2AB - 3A^2 - 3B^2}. \tag{8}$$

При $Q < 0$ коренями будуть:

$$r_1 = -\frac{a}{3} + 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\alpha}{3};\ r_{2,3} = -\frac{a}{3} - 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{\alpha}{3} \pm \frac{\pi}{3}\right). \tag{9}$$

Тут позначено:

$$Q = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right);\ p = \frac{a^2}{3} + b;\ q = m - \frac{ab}{3};\ A = 0,5\sqrt[3]{\sqrt{Q} - \frac{q}{2}};\ B = 0,5\sqrt[3]{\sqrt{Q} + \frac{q}{2}};\ \alpha = \arccos\frac{0,5q}{\sqrt{-\frac{p}{3}}}.$$

Розв'язок диференціального рівняння (5) має різний вигляд залежно від значення коренів r_1, r_2, r_3 характеристичного рівняння. Випишемо всі можливі варіанти.

Варіант 1. Корені r_1, r_2, r_3 характеристичного рівняння дійсні та різні і жоден не дорівнює нулю.

В цьому випадку розв'язок та перші похідні від нього запишуться у вигляді:

$$y(t) = N\exp(r_1 t) + P\exp(r_2 t) + L\exp(r_3 t) + Rt + S\,; \tag{10}$$

$$y'(t) = N r_1 \exp(r_1 t) + P r_2 \exp(r_2 t) + L r_3 \exp(r_3 t) + R\,; \tag{11}$$

$$y''(t) = N r_1^2 \exp(r_1 t) + P r_2^2 \exp(r_2 t) + L r_3^2 \exp(r_3 t)\,; \tag{12}$$

$$S = \frac{dm - bc}{m^2};\ R = \frac{c}{m}; \tag{13}$$

$$N = \frac{\Delta_1}{\Delta};\ P = \frac{\Delta_2}{\Delta};\ L = \frac{\Delta_3}{\Delta}\,; \tag{14}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \exp(r_1 t_{k-1}) & \exp(r_2 t_{k-1}) & \exp(r_3 t_{k-1}) \\ r_1 \exp(r_1 t_{k-1}) & r_2 \exp(r_2 t_{k-1}) & r_3 \exp(r_3 t_{k-1}) \\ r_1^2 \exp(r_1 t_{k-1}) & r_2^2 \exp(r_2 t_{k-1}) & r_3^2 \exp(r_3 t_{k-1}) \end{vmatrix}.$$

Визначники $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ одержимо із визначника Δ шляхом заміни в ньому відповідного стовпця (за індексом при Δ) наступними елементами:

$$y_{0,k-1} - Ct_{k-1} - S;\ y'_{0,k-1} - C;\ y''_{0,k-1}.$$

Варіант 2. Корені r_1, r_2, r_3 дійсні та різні, причому $r_1 = 0$. В цьому випадку розв'язок має вигляд:

$$y(t) = N + P\exp(r_2 t) + L\exp(r_3 t) + Rt^2 + St\,; \tag{15}$$

$$y'(t) = P r_2 \exp(r_2 t) + L r_3 \exp(r_3 t) + 2Rt + S\,; \tag{16}$$

$$y''(t) = P r_2^2 \exp(r_2 t) + L r_3^2 \exp(r_3 t) + 2R\,; \tag{17}$$

$$S = \frac{db - ac}{b^2};\ R = \frac{c}{2b};\ \ \Delta = \begin{vmatrix} 1 & \exp(r_2 t_{k-1}) & \exp(r_3 t_{k-1}) \\ 0 & r_2 \exp(r_2 t_{k-1}) & r_3 \exp(r_3 t_{k-1}) \\ 0 & r_2^2 \exp(r_2 t_{k-1}) & r_3^2 \exp(r_3 t_{k-1}) \end{vmatrix}.$$

Величини N, P, L обчислюються за формулою (14), у якій через $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ позначено визначники, що одержані із визначника Δ шляхом заміни в ньому відповідного стовпця (за індексом при Δ) наступними елементами:

$$y_{0,k-1} - St_{k-1} - Rt_{k-1}^2;\ \ y'_{0,k-1} - S - 2Rt;\ \ y''_{0,k-1} - 2R\,.$$

Варіант 3. Корені r_1, r_2, r_3 характеристичного рівняння дійсні, не дорівнюють нулю і $r_2 = r_3$. В цьому випадку розв'язок має вигляд:

$$y(t) = N\exp(r_1 t) + P\exp(r_2 t) + Lt\exp(r_2 t) + Rt + S\,; \tag{18}$$

$$y'(t) = N r_1 \exp(r_1 t) + P r_2 \exp(r_2 t) + L(1 + r_2 t)\exp(r_2 t) + R\,; \tag{19}$$

$$y''(t) = N r_1^2 \exp(r_1 t) + P r_2^2 \exp(r_2 t) + L(2 + r_2 t) r_2 \exp(r_2 t)\,; \tag{20}$$

$$S = \frac{dm - bc}{m^2};\ \ R = \frac{c}{m};\ \ \Delta = \begin{vmatrix} \exp(r_1 t_{k-1}) & \exp(r_2 t_{k-1}) & t_{k-1}\exp(r_2 t_{k-1}) \\ r_1 \exp(r_1 t_{k-1}) & r_2 \exp(r_2 t_{k-1}) & (1 + r_2 t_{k-1})\exp(r_2 t_{k-1}) \\ r_1^2 \exp(r_1 t_{k-1}) & r_2^2 \exp(r_2 t_{k-1}) & (2 + r_2 t_{k-1}) r_2 \exp(r_2 t_{k-1}) \end{vmatrix}.$$

Величини N, P, L обчислюємо за формулою (14), у якій через $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ позначено визначники, що одержані із визначника Δ шляхом заміни в ньому відповідного стовпця (за індексом при Δ) наступними елементами:

$$y_{0,k-1} - Rt_{k-1} - S;\ y'_{0,k-1} - R;\ y''_{0,k-1}\,.$$

Варіант 4. Корені характеристичного рівняння $r_1 = 0,\ r_2 = r_3 \neq 0$. В цьому випадку розв'язок має вигляд:

$$y(t) = N + P\exp(r_2 t) + Lt\exp(r_2 t) + Rt^2 + St\,; \tag{21}$$

$$y'(t) = P r_2 \exp(r_2 t) + L(1 + r_2 t)\exp(r_2 t) + 2Rt + S\,; \tag{22}$$

$$y''(t) = P r_2^2 \exp(r_2 t) + L(2 + r_2 t) r_2 \exp(r_2 t) + 2R\,; \tag{23}$$

$$S = \frac{db - ac}{b^2};\ \ R = \frac{c}{2b};\ \ \Delta = \begin{vmatrix} 1 & \exp(r_2 t_{k-1}) & t_{k-1}\exp(r_2 t_{k-1}) \\ 0 & r_2 \exp(r_2 t_{k-1}) & (1 + r_2 t_{k-1})\exp(r_2 t_{k-1}) \\ 0 & r_2^2 \exp(r_2 t_{k-1}) & (2 + r_2 t_{k-1}) r_2 \exp(r_2 t_{k-1}) \end{vmatrix}.$$

Величини N, P, L обчислюємо за формулою (14), у якій через $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ позначено визначники, що одержані із визначника Δ шляхом заміни в ньому відповідного стовпця (за індексом при Δ) наступними елементами:

$$y_{0,k-1} - Rt_{k-1}^2 - St_{k-1};\ y'_{0,k-1} - 2Rt_{k-1} - S;\ y''_{0,k-1} - 2R\,.$$

Варіант 5. Корені характеристичного рівняння дійсні і $r_1 \neq 0,\ r_2 = r_3 = 0$. В цьому випадку розв'язок має вигляд:

$$y(t) = N\exp(r_1 t) + P + Lt + Rt^3 + St^2\,; \tag{24}$$

$$y'(t)=N r_1 \exp(r_1 t)+L+3Rt^2+2St\,; \tag{25}$$

$$y''(t)=N r_1^2 \exp(r_1 t)+6Rt+2S\,; \tag{26}$$

$$S=\frac{da-c}{2a^2};\; R=\frac{c}{6a};\; \Delta=\begin{vmatrix} \exp(r_1 t_{k-1}) & 1 & t_{k-1} \\ r_1\exp(r_1 t_{k-1}) & 0 & 1 \\ r_1^2\exp(r_1 t_{k-1}) & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Величини N,P,L обчислюємо за формулою (14), у якій через $\Delta_1,\Delta_2,\Delta_3$ позначено визначники, що одержані із визначника Δ шляхом заміни в ньому відповідного стовпця (за індексом при Δ) наступними елементами:

$$y_{0,k-1}-Rt_{k-1}^3-St_{k-1}^2;\; y'_{0,k-1}-3Rt_{k-1}^2-2St_{k-1};\; y''_{0,k-1}-6Rt_{k-1}-2S\,.$$

Варіант 6. Корені характеристичного рівняння $r_1\neq 0,\, r_{2,3}=\alpha\pm\beta i$. В цьому випадку розв'язок має вигляд:

$$y(t)=N\exp(r_1 t)+P\exp(\alpha t)\cos(\beta t)+L\exp(\alpha t)\sin(\beta t)+Rt+S\,; \tag{27}$$

$$y'(t)=N r_1\exp(r_1 t)+P\big(\alpha\cos(\beta t)-\beta\sin(\beta t)\big)\exp(\alpha t)+L\big(\alpha\sin(\beta t)+\beta\cos(\beta t)\big)\exp(\alpha t)+R\,; \tag{28}$$

$$\begin{aligned} y''(t)=N r_1^2\exp(r_1 t)+P\Big(\big(\alpha^2-\beta^2\big)\cos(\beta t)-2\alpha\beta\sin(\beta t)\Big)\exp(\alpha t)+ \\ +L\Big(\big(\alpha^2-\beta^2\big)\sin(\beta t)+2\alpha\beta\cos(\beta t)\Big)\exp(\alpha t); \end{aligned} \tag{29}$$

$$S=\frac{dm-bc}{m^2};\; R=\frac{c}{m};$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} \exp(r_1 t_{k-1}) & \exp(\alpha t_{k-1})\cos(\beta t_{k-1}) & \exp(\alpha t_{k-1}) \\ r_1\exp(r_1 t_{k-1}) & \exp(\alpha t_{k-1})\big(\alpha\cos(\beta t_{k-1})-\beta\sin(\beta t_{k-1})\big) & \exp(\alpha t_{k-1})\big(\alpha\sin(\beta t_{k-1})+\beta\cos(\beta t_{k-1})\big) \\ r_1^2\exp(r_1 t_{k-1}) & \begin{array}{l}\exp(\alpha t_{k-1})((\alpha^2-\beta^2)\cos(\beta t_{k-1})- \\ -2\alpha\beta\sin(\beta i_{k-1}))\end{array} & \begin{array}{l}\exp(r_3 t_{k-1})((\alpha^2-\beta^2)\sin(\beta t_{k-1})+ \\ +2\alpha\beta\cos(\beta t_{k-1}))\end{array} \end{vmatrix}.$$

Величини N,P,L обчислюються за формулою (14), у якій через $\Delta_1,\Delta_2,\Delta_3$ позначено визначники, що одержані із визначника Δ шляхом заміни в ньому відповідного стовпця (за індексом при Δ) наступними елементами:

$$y_{0,k-1}-Ct_{k-1}-S;\; y'_{0,k-1}-C;\; y''_{0,k-1}\,.$$

Варіант 7. Корені характеристичного рівняння $r_1=0,\, r_{2,3}=\alpha\pm\beta i$. В цьому випадку розв'язок має вигляд:

$$y(t)=N+P\exp(\alpha t)\cos(\beta t)+L\exp(\alpha t)\sin(\beta t)+St+Rt^2\,; \tag{30}$$

$$y'(t)=P\big(\alpha\cos(\beta t)-\beta\sin(\beta t)\big)\exp(\alpha t)+L\big(\alpha\sin(\beta t)+\beta\cos(\beta t)\big)\exp(\alpha t)+S+2Rt\,; \tag{31}$$

$$\begin{aligned} y''(t)=P\Big(\big(\alpha^2-\beta^2\big)\cos(\beta t)-2\alpha\beta\sin(\beta t)\Big)\exp(\alpha t)+ \\ +L\Big(\big(\alpha^2-\beta^2\big)\sin(\beta t)+2\alpha\beta\cos(\beta t)\Big)\exp(\alpha t)+2R; \end{aligned} \tag{32}$$

$$S=\frac{db-ac}{b^2};\; R=\frac{c}{2b};$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & \exp(\alpha t_{k-1})\cos(\beta t_{k-1}) & \exp(\alpha t_{k-1}) \\ 0 & \exp(\alpha t_{k-1})\big(\alpha\cos(\beta t_{k-1})-\beta\sin(\beta t_{k-1})\big) & \exp(\alpha t_{k-1})\big(\alpha\sin(\beta t_{k-1})+\beta\cos(\beta t_{k-1})\big) \\ 0 & \begin{array}{l}\exp(\alpha t_{k-1})((\alpha^2-\beta^2)\cos(\beta t_{k-1})- \\ -2\alpha\beta\sin(\beta i_{k-1}))\end{array} & \begin{array}{l}\exp(r_3 t_{k-1})((\alpha^2-\beta^2)\sin(\beta t_{k-1})+ \\ +2\alpha\beta\cos(\beta t_{k-1}))\end{array} \end{vmatrix}.$$

Величини N,P,L обчислюються за формулою (14), у якій через $\Delta_1,\Delta_2,\Delta_3$ позначено визначники, що одержані із визначника Δ шляхом заміни в ньому відповідного стовпця (за індексом при Δ) наступними елементами:

$$y_{0,k-1}-St_{k-1}-Rt_{k-1}^2;\ y'_{0,k-1}-S-2Rt_{k-1};\ y''_{0,k-1}-2R\,.$$

Варіант 8. Корені характеристичного рівняння $r_1=r_2=r_3\neq 0$. В цьому випадку розв'язок має вигляд:

$$y(t)=N\exp(r_1t)+Pt\exp(r_1t)+Lt^2\exp(r_1t)+Rt+S\,; \quad (33)$$

$$y'(t)=N r_1\exp(r_1t)+P(1+r_1t)\exp(r_1t)+L\left(2t+r_1t^2\right)\exp(r_1t)+R\,; \quad (34)$$

$$y''(t)=N r_1^2\exp(r_1t)+P\left(2r_1+r_1^2t\right)\exp(r_1t)+L\left(2+4r_1t+r_1^2t^2\right)\exp(r_1t)\,; \quad (35)$$

$$S=\frac{dm-bc}{m^2};\ R=\frac{c}{m};$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}\exp(r_1t_{k-1}) & t_{k-1}\exp(r_1t_{k-1}) & t_{k-1}^2\exp(r_1t_{k-1})\\ r_1\exp(r_1t_{k-1}) & (1+r_1t_{k-1})\exp(r_1t_{k-1}) & \left(2t_{k-1}+r_1t_{k-1}^2\right)\exp(r_1t_{k-1})\\ r_1^2\exp(r_1t_{k-1}) & \left(2r_1+r_1^2t_{k-1}\right)\exp(r_1t_{k-1}) & \left(2+4t_{k-1}r_1+r_1^2t_{k-1}^2\right)\exp(r_1t_{k-1})\end{vmatrix}.$$

Величини N,P,L обчислюються за формулою (14), у якій через $\Delta_1,\Delta_2,\Delta_3$ позначено визначники, що одержані із визначника Δ шляхом заміни в ньому відповідного стовпця (за індексом при Δ) наступними елементами:

$$y_{0,k-1}-Ct_{k-1}-S;\ y'_{0,k-1}-C;\ y''_{0,k-1}\,.$$

Варіант 9. Усі корені характеристичного рівняння дорівнюють нулю. В цьому випадку розв'язок має вигляд:

$$y(t)=N+Pt+Lt^2+St^3+Rt^4\,; \quad (36)$$

$$y'(t)=P+2Lt+3St^2+4Rt^3\,; \quad (37)$$

$$y''(t)=2L+6St+12Rt^2\,; \quad (38)$$

$$S=\frac{d}{6};\ R=\frac{c}{24};\ \Delta=\begin{vmatrix}1 & t_{k-1} & t_{k-1}^2\\ 0 & 1 & 2t_{k-1}\\ 0 & 0 & 2\end{vmatrix}.$$

Величини N,P,L обчислюємо за формулою (14), у якій через $\Delta_1,\Delta_2,\Delta_3$ позначено визначники, що одержані із визначника Δ шляхом заміни в ньому відповідного стовпця (за індексом при Δ) наступними елементами:

$$y_{0,k-1}-Rt_{k-1}^4-St_{k-1}^3;\ y'_{0,k-1}-4Rt_{k-1}^3-3St_{k-1}^2;\ y''_{0,k-1}-12Rt_{k-1}^2-6St_{k-1}\,.$$

В усіх варіантах значення $y_{0,k-1}=y(t_{k-1}),\ y'_{0,k-1}=y'(t_{k-1}),\ y''_{0,k-1}=y''(t_{k-1})$ обчислюються вкінці попереднього інтервалу і служать початковими умовами для наступного.

Обчислення в програмі рекомендуємо здійснювати в такій послідовності.

Послідовність обчислень на ЕОМ

1) Ввід $t_0,\,t_n,\,h,\,y_0,\,y'_0,\,y''_0,\,n,\,k=0$.

2) Обчислення k та t_k за формулами: $k=k+1,\ t_k=t_0+k\cdot h$.

3) Обчислення $a_k,\,b_k,m_k,\,c_k,\,d_k$ за формулами (6).

4) Обчислення коренів $r_1,\,r_2,\,r_3$ характеристичного рівняння за формулами (8), (9).

5) Вибір варіанта розв'язку (в залежності від значення коренів $r_1,\,r_2,\,r_3$).

6) Обчислення розв'язку при $t=t_k$ за однією із формул: (10), (15), (18), (21), (24), (27), (30), (33), (36), (39).

7) Обчислення значень $y(t_k),y'(t_k),y''(t_k)$ у кінці даного інтервалу.

8) Друк (вивід на екран) значень t_k, $y(t_k)$, $y'(t_k)$, $y''(t_k)$.

9) Присвоєння початкових значень $y_0 = y(t_k)$; $y'_0 = y'(t_k)$; $y''_0 = y(t_k)$ для наступного інтервалу.

10) Перевірка умови $k < n$. При її виконанні керування передається п. 2, а при невиконанні – п. 11.

11) Кінець виконання програми.

Список використаних джерел

1. Марчук Р. А. Аналітично числовий метод розв'язування лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь другого порядку / Р. А. Марчук // Збірник наукових праць факультету прикладної математики та комп'ютерних технологій Хмельницького національного університету. – 2009. – № 1 (2). – С. 116 – 118.

2. Дубовик В. П. Вища математика / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – К. : А.С.К., 2005. – 648 с.